

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
«СТРОИТЕЛЬНЫЕ КАДРЫ ПОВОЛЖЬЯ»

2010 год

СЕКЦИЯ: МАТЕМАТИКА И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА 11 КЛАСС

1. а) Определить все целые положительные  $n$ , для которых число  $2^n - 1$  делится на 7;  
б) доказать, что ни при каком целом положительном  $n$   $2^n + 1$  не делится на 7.

2. Докажите неравенство

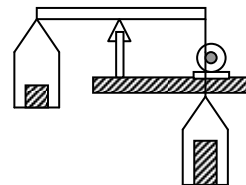
$$\pi^{-1} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{4x + x^{-1}}}{2} \right) + \sqrt[3]{16x^2 + x^{-2}} \geq 2,25$$

для всех допустимых значений  $x \in \mathbb{R}$ .  
Достигается ли знак равенства?

3. Правильная треугольная пирамида со стороной основания  $a$  вписана в сферу, при этом центр сферы делит высоту пирамиды в отношении  $\sqrt{5} : 1$ , считая от вершины. Верхнее основание правильной четырёхугольной призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины её нижнего основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы её объём был наибольшим? Найдите это значение объёма.

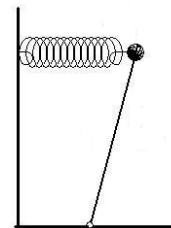
4. Решите уравнение  $2 \arccos x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ .

5. Для измерения момента электродвигателя нить, прикрепленная к весам (см. рис.), обматывается вокруг горизонтально расположенного вала электродвигателя, имеющего диаметр  $d$  и вращающегося с постоянной угловой скоростью с постоянным моментом. К другому концу нити прикреплен груз массой  $M$ . При включении двигателя весы уравниваются грузом массы  $M/2$ . При изменении направления вращения двигателя уравнивающая масса стала равной  $M$ . Определить момент, развиваемый двигателем.



6. Скользящий треугольник. Равносторонний треугольник  $ABC$  скользит по гладкому столу. В некоторый момент скорость вершины  $A$ , равная  $V$ , оказалась вдвое меньше, чем скорость вершины  $B$ , причем обе скорости оказались перпендикулярными стороне  $AB$ . Чему была равна скорость вершины  $C$ ?

7. ТЭЦ на реке. На берегу реки расположена тепловая станция. Произведенный пар подается в турбины при температуре  $250^\circ\text{C}$ , а израсходованная вода сливается в реку при температуре  $20^\circ\text{C}$ . При какой температуре забирается вода выше станции по течению реки, если мощность станции  $1000 \text{ МВт}$ , а скорость расхода речной воды составляет  $q = 40 \text{ т/с}$ ? Для удобства оценки считайте, что тепловая станция работает по обратимому циклу Карно.



8. Перевернутый маятник. На рисунке изображен математический маятник массой  $m$  на жестком невесомом стержне длиной  $R$ . Его падение ограничивается с одной стороны пружиной с жесткостью  $k$ , прикрепленной к вертикальной стенке. Рассчитайте период малых колебаний в такой системе.