

ВТОРАЯ МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ, ПРОВОДИМАЯ СТРОИТЕЛЬНЫМИ ВУЗАМИ РОССИИ,
2009 ГОД

МАТЕМАТИКА
9-10 классы

1. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.
2. Решить в целых числах уравнение: $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3$.
3. Докажите справедливость равенства:
$$1 - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi + \dots = \frac{\sqrt{2 \cos \varphi}}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)}$$
 для любого $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
4. Область определения функции $y = f(x)$ – отрезок $[-1; 2]$. Найдите область определения функции $y = f(2x)$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}$.
6. Постройте график функции $y = \frac{\sqrt{1 + 2x + x^2}}{x + 1}$.
7. Решите неравенство $(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-6) \geq 17$.
8. Сократите дробь: $\frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 3x - 10}$.
9. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} (3x + y)^2 + 2(x - y)^2 = 96, \\ 3x + y = 2(x - y). \end{cases}$$
10. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 треугольника. Докажите, что произведение площадей противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.
11. Решите неравенство: $2 - \cos x > \frac{1}{1 + x^2}$.
12. При каких значениях a разность корней уравнения $ax^2 + x - 2 = 0$ равна 3?
13. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 ч. утра из города A в город B отправляется плот и одновременно из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 ч. Доплыв до города A , лодка поворачивает обратно и приплывает в город B одновременно с плотом. Успеют лодка и плот прибыть в город B к 9 ч. вечера (того же дня)?
14. Постройте график функции: $y = \sqrt{2 + \sin^4 x - \cos 2x} + \sqrt{2 + \cos^4 x + \cos 2x}$.
15. Решите уравнение: $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x$.